

ÜBUNGEN ZU ANALYSIS 1
Aufgaben des Tages 21 — Musterlösung

Aufgabe 1: (4 Punkte) Beweise für $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, und $r, s \in \mathbb{Q}$ die folgenden Aussagen nur unter Zuhilfenahme der Potenzgesetze für natürliche Exponenten und mit Hilfe der Monotonie und der Rechenregeln für natürliche Wurzeln.

- (a) Aus $a < b$ folgt $a^r < b^r$, falls $r > 0$.
- (b) Es gilt $a^r a^s = a^{r+s}$.
- (c) Es gilt $a^r b^r = (ab)^r$.
- (d) Es gilt $(a^r)^s = a^{rs}$.

Lösung.

- (a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $r = \frac{m}{n}$. Dann ist

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}} = b^r,$$

wo die Ungleichung wegen der Monotonie der n -ten Wurzel aus $a < b$ folgt.

- (b) Wir zeigen zunächst, dass die Aussage für ganzzahlige $r, s \in \mathbb{Z}$ gilt. Haben $r, s \in \mathbb{Z}$ dasselbe Vorzeichen, so folgt $a^r a^s = a^{r+s}$ sofort aus den Potenzregeln für natürliche Exponenten, indem wir a durch $\frac{1}{a}$ ersetzen. Haben r und s verschiedene Vorzeichen, so gilt $a^r a^s = a^{r+s}$, weil für $n, m \in \mathbb{N}$

$$a^n a^{-m} = \frac{a^n}{a^m} = \begin{cases} a^{n-m} & \text{falls } n > m, \\ \frac{1}{a^{m-n}} & \text{falls } m > n. \end{cases}$$

Seien nun $n, q \in \mathbb{N}$, $m, p \in \mathbb{Z}$ mit $r = \frac{m}{n}$ und $s = \frac{p}{q}$. Dann gilt

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{pn}{qn}} = \sqrt[qn]{a^{mq} a^{pn}} = \sqrt[qn]{a^{qm+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{qn}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Hier haben wir $\sqrt[n]{a} \sqrt[q]{b} = \sqrt[qn]{ab}$ für $n \in \mathbb{N}$ verwendet.

- (c) Für ganzzahlige $r, s \in \mathbb{Z}$ folgt die Aussage sofort aus den Potenzgesetzen für natürliche Exponenten, wenn wir a, b durch ihr Inverses ersetzen.
Seien also $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ mit $r = \frac{m}{n}$. Dann gilt

$$a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^m = (\sqrt[n]{ab})^m = (ab)^{\frac{m}{n}}.$$

- (d) Für ganzzahlige $r, s \in \mathbb{Z}$ ist die Aussage offensichtlich mit Hilfe der Rechenregeln für Potenzen mit natürlichem Exponent. Seien nun $n, q \in \mathbb{N}, m, p \in \mathbb{Z}$ mit $r = \frac{m}{n}$ und $s = \frac{p}{q}$. Dann gilt mit den aus der Vorlesung bekannten Identitäten, dass $\sqrt[q]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ und $\sqrt[n]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[nq]{a}$, wo $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, a > 0$,

$$(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = (((a^{\frac{1}{n}})^m)^p)^{\frac{1}{q}} = ((a^{\frac{1}{n}})^{mp})^{\frac{1}{q}} = ((a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{q}})^{mp} = (a^{\frac{1}{nq}})^{mp} = a^{\frac{mp}{nq}}.$$

■

Aufgabe 2: (4 Punkte) Zeige, dass die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ schneller wächst als jede Potenz von $x \in \mathbb{R}$ mit positivem Exponent $\alpha > 0$, d.h. zu jedem $\alpha > 0$ gibt es eine reelle Konstante $c \equiv c(\alpha) > 0$, so dass

$$\exp(x) > x^\alpha \quad \text{für alle } x > c.$$

Zeige dann, dass der natürliche Logarithmus $\log : \exp(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ langsamer wächst als jede Potenz von $x \in \mathbb{R}$ mit positivem Exponent $\varepsilon > 0$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $d \equiv d(\varepsilon) > 0$, so dass

$$\log(x) < x^\varepsilon \quad \text{für alle } x > d.$$

Lösung. Zu gegebenem $\alpha > 0$ gibt es eine (eindeutig bestimmte) natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n \leq \alpha < n + 1.$$

Es gilt nun nach der Vorlesung, dass für alle $x > (2n)^2$

$$\exp(x) > x^n \geq x^\alpha.$$

Damit ist $c = c(\alpha) = (2n)^2$ die gesuchte Konstante.

Für $\varepsilon > 0$ sei $\alpha := \frac{1}{\varepsilon}$ und dann $c := c(\alpha)$. Also gilt $\exp(x) > x^\alpha$ für alle $x > c$ und wegen der Monotonie des Logarithmus folgt für

$$y := \log(x) > \log(\exp(c)) = c,$$

dass

$$x = \exp(y) = \exp(\log(x)) > (\log(x))^\alpha$$

und somit

$$x^\varepsilon > \log(x) \quad \text{für } x > \exp(c)$$

Die gesuchte Konstante ist also $d = c(\frac{1}{\varepsilon})$.

■

Aufgabe 3: (2 Punkte)

- (a) Zeige die Ungleichung $\log(1+x) \leq x$ für beliebige $x \geq 0$.
 (b) Bestimme alle reellen Lösungen $x \in \mathbb{R}, x > e$, der Gleichung

$$\log(x-e) = 1 - 2 \log(\sqrt{x+e}).$$

Lösung.

(a) Wir zeigen zunächst die Ungleichung

$$1 + y \leq \exp(y)$$

für $y \geq 0$. Diese Ungleichung folgt leicht aus der Darstellung von $\exp$ als Potenzreihe:

$$\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots$$

Für $y \geq 0$ ist jeder Summand nicht-negativ, also gilt insbesondere $\exp(y) \geq 1 + y$. Setzen wir nun $y = \log(1 + x)$ für $x \geq 0$, dann gilt $y \geq 0$ und wir erhalten

$$1 + \log(1 + x) \leq \exp(\log(1 + x)) = 1 + x.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} \log(x - e) = 1 - 2\log(x + e)^{1/2} &\iff \log(x^2 - e^2) = 1 \\ &\iff x^2 - e^2 = \exp(1) = e \\ &\iff x^2 = e(e + 1). \end{aligned}$$

Die letzte dieser Gleichungen hat die Lösungen $x = \pm\sqrt{e(e + 1)}$. Wegen $x > e$ lautet die Antwort also $x = \sqrt{e(e + 1)}$.

■